Aufgabe 1: Termumformungen (4 Punkte)

Vereinfache so weit wie möglich. Alle Endresultate müssen vollständig gekürzt werden.
Alle Variablen stehen für positive Zahlen.

a) $7a - 7ab - (-8a + 9ab - (-14b + 11ab) - 5a)$

b) $\dfrac{7x}{2a} - \dfrac{3x-4}{5a}$

c) $\dfrac{s-x}{s} : \dfrac{s-x}{s-b}$

d) $\sqrt{3ab^3} \cdot \sqrt{12b}$

Lösungen:

a) $$\begin{aligned}&7a - 7ab - (-8a + 9ab - (-14b + 11ab) - 5a) = \\ &7a - 7ab + 8a - 9ab - 14b + 11ab + 5a = \underline{\underline{20a - 5ab - 14b}}\end{aligned}$$ (1 P)

b) $$\frac{7x}{2a} - \frac{3x-4}{5a} = \frac{35x}{10a} - \frac{6x-8}{10a} = \underline{\underline{\frac{29x+8}{10a}}} = \underline{\underline{\frac{29x}{10a} + \frac{4}{5a}}}$$ (1 P)

c) $$\frac{s-x}{s} : \frac{s-x}{s-b} = \frac{s-x}{s} \cdot \frac{s-b}{s-x} = \underline{\underline{\frac{s-b}{s}}}$$ (1 P)

d) $$\sqrt{3ab^3} \cdot \sqrt{12b} = \sqrt{36ab^4} = \underline{\underline{6b^2 \cdot \sqrt{a}}}$$ (1 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- Für jedes richtige Endergebnis: 1 Punkt

Aufgabe 2: Termumformungen (4 Punkte)

Vereinfache so weit wie möglich. Alle Endresultate müssen vollständig gekürzt werden.
Alle Variablen stehen für positive Zahlen.

a) $\dfrac{x^2 - x}{27x^2} \cdot \dfrac{3y^2 - 6y}{xy - y}$

b) $\dfrac{(-8x)^2}{\sqrt{81x^2}} + \dfrac{-7x^2}{10x - \sqrt{8x \cdot 8x}}$

Lösungen:

a) $\dfrac{x^2 - x}{27x^2} \cdot \dfrac{3y^2 - 6y}{xy - y} = \dfrac{x\,(x-1)}{27x^2} \cdot \dfrac{3y(y-2)}{y\,(x-1)} = \underline{\underline{\dfrac{y-2}{9x}}}$ (2 P)

b) $\dfrac{(-8x)^2}{\sqrt{81x^2}} + \dfrac{-7x^2}{10x - \sqrt{8x \cdot 8x}} = \dfrac{64x^2}{9x} + \dfrac{-7x^2}{2x} = \dfrac{64x}{9} + \dfrac{-7x}{2} =$

$= \dfrac{128x}{18} + \dfrac{-63x}{18} = \underline{\underline{\dfrac{65x}{18}}}$ (2 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- Pro Fehler ein Punkt Abzug
- a) Dreimal richtig ausgeklammert => 1 P, unabhängig von weiteren Fehlern
- b) Falls alle Wurzeln und Potenzen richtig ausgerechnet wurden => 1 P, unabhängig von weiteren Fehlern

Aufgabe 3: Gleichungen (4 Punkte)

a) Löse die Gleichung nach c auf und schreibe das Resultat als vollständig gekürzten Bruch:

$$-5-3(1-2c)=c-2(c+5)$$

b) Löse die Gleichung nach x auf:

$$\frac{3x+10}{5}-\frac{2x-9}{3}=\frac{2}{5}\left(\frac{x}{6}+\frac{15}{2}\right)$$

Lösungen:

a) $-5-3+6c=c-2c-10$ (1 P)

$$6c-8=-c-10$$

$$7c=-2$$

$$\underline{\underline{c=-\frac{2}{7}}}$$ (1 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- 2 Punkte: für korrekten Lösungsweg mit richtigem Ergebnis
- 1 Punkt: für korrekte Lösung als gerundete Dezimalzahl oder ungekürzten Bruch
- 1 Punkt: für eine klammerfreie korrekte Gleichung: $-5-3+6c=c-2c-10$
  1 Punkt: für einen vollständigen Lösungsweg mit einem Fehler,
  z.B. einem Abschreibfehler
- 0 Punkte: bei zwei oder mehr Fehlern
  wenn beide Klammern falsch aufgelöst wurden, zählt das als zwei Fehler

b) $\frac{9x+30}{15}-\frac{10x-45}{15}=\frac{2x}{30}+\frac{30}{10}$

$$\frac{9x+30-10x+45}{15}=\frac{2x+90}{30}$$ (1 P)

$$\frac{-x+75}{15}=\frac{x+45}{15}$$

$$-x+75=x+45$$

$$30=2x$$

$$\underline{\underline{15=x}}$$ (1 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- 2 Punkte: für korrekten Lösungsweg mit richtigem Ergebnis
- 1 Punkt: wenn **eine** der folgenden Umformungen korrekt durchgeführt wurde:
  - die linke Seite ist korrekt auf **einem** Bruchstrich zusammengefasst: $\frac{9x+30-10x+45}{15}$
  - die linke Seite wurde korrekt mit 15 (oder 30) multipliziert **und** auf der rechten Seite wurde auch eine Multiplikation mit 15 (oder 30)

durchgeführt (aber eventuell falsch):
$9x + 30 - 10x + 45 = \,.\,.\,.$ oder $18x + 60 - 20x + 90 = \,.\,.\,.$

- auf der rechten Seite wurde die Klammer korrekt aufgelöst und die Brüche sind gleichnamig:
$. \, . \, . = \frac{2x}{30} + \frac{90}{30}$ oder $. \, . \, . = \frac{x}{15} + \frac{45}{15}$ oder $. \, . \, . = \frac{2x+90}{30}$ oder $. \, . \, . = \frac{x+45}{15}$
- die rechte Seite ist nennerfrei und die Klammer wurde korrekt aufgelöst **und** auf der linken Seite wurde auch mit 15 (oder 30) multipliziert (aber eventuell falsch):
$. \, . \, . = 2x + 90$ oder $. \, . \, . = x + 45$

Achtung: bei nennerfreien Gleichungen muss ersichtlich sein, dass **beidseitig** multipliziert wurde, sonst gibt es 0 Punkte (ausser die einseitige Multiplikation ist der einzige Fehler)

- 1 Punkt: für einen vollständigen Lösungsweg mit einem Fehler, z.B. einem Abschreibfehler
- 0 Punkte: bei zwei oder mehr Fehlern, zweimal die gleiche falsche Überlegung gilt als zwei Fehler

Aufgabe 4: Textaufgabe (4 Punkte)

Am Anfang hatte Xenia dreimal so viele Murmeln wie Yves. Dann schenkte sie ihm 36 Murmeln. Danach hatte sie nur noch 40% mehr Murmeln als Yves.

Wie viele Murmeln hatte Yves am Anfang?

Die volle Punktzahl erhältst du nur, wenn du die Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung löst.

Lösung:

	anfangs	nachher
Xenia	$3x$	$3x - 36$
Yves	x	$x + 36$

ODER:

	anfangs	nachher
Xenia	x	$x - 36$
Yves	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{3} + 36$

$$\begin{aligned} 1.4(x+36) &= 3x - 36 \\ 1.4x + 50.4 &= 3x - 36 \\ 86.4 &= 1.6x \\ 54 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.4\left(\frac{x}{3} + 36\right) &= x - 36 \\ \frac{7x}{15} + 50.4 &= x - 36 \\ 6.4 &= \frac{8x}{15} \\ 162 &= x \\ 54 &= \frac{x}{3} \end{aligned}$$

Am Anfang hatte Yves 54 Murmeln.

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

Zwei der drei Terme sind vorhanden und die Bedeutung des Terms ist klar: • Xenias Murmeln am Anfang $= 3x$ oder: $= \frac{x}{3}$ (für Yves) • Xenias Murmeln nachher $= 3x - 36$ $= x - 36$ • Yves Murmeln nachher $= x + 36$ $= \frac{x}{3} + 36$	1 P
Die «40% mehr» wurden korrekt umgesetzt, z.B. $1.4(x+36)$ oder $x + 36 + \frac{x+36}{100} \cdot 40$ oder $x + \frac{x}{100} \cdot 40$ oder $\frac{x}{100} \cdot 140$ oder $1.4x$ (Variante, wenn $x =$ Xenias Murmeln am Anfang: $1.4\left(\frac{1}{3}x + 36\right)$ etc.)	1 P
Gleichung richtig aufgestellt: $1.4(x+36) = 3x - 36$ oder $1.4\left(\frac{1}{3}x + 36\right) = x - 36$	1 P
Lösung $x = 54$ (Variante: $\frac{1}{3}x = 54$) Ein Antwortsatz ist nicht zwingend nötig.	1 P

- Eine fast richtige Gleichung, in der nur die «40% mehr» falsch umgesetzt sind, gibt total 2P. z.B. $\frac{x+36}{100} \cdot 40 = 3x - 36$
- Wurde eine falsche Gleichung richtig gelöst, gibt es dafür keine Punkte. Mit einer falschen Gleichung erreicht man also maximal 2 Punkte.
- Wurde die Aufgabe durch Pröbeln richtig gelöst, gibt es 2 Punkte.

Aufgabe 5: Prozentrechnen (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Tina mischt zwei Sorten Marmelade. In der ersten sind 30% Kirschen und in der zweiten 40% Kirschen. Sie mischt 500 g der ersten Sorte mit 750 g der zweiten Sorte. Wie gross ist jetzt der Prozentanteil der Kirschen in der gemischten Marmelade?

b) Wird eine Kaffeesorte geröstet, so gehen 22% des Gewichts verloren. 10 kg ungerösteter Kaffee kosten CHF 85.80. Wie muss dann der Preis für 15 kg gerösteten Kaffee festgelegt werden, wenn keine weiteren Kosten zu berücksichtigen sind?

Lösungen:

a)

$$\left.\begin{array}{l}30\% \text{ von } 500 \text{ g sind } 150 \text{ g Kirschen} \\ 40\% \text{ von } 750 \text{ g sind } 300 \text{ g Kirschen}\end{array}\right\}$$ (150 g und 300 g) (1 P)

Total hat es also 450 g Kirschen in der neuen Mischung.

$\frac{450\ g}{1250\ g} = 0.36 = 36\%$ (1 P)

Es hat in der neuen Mischung 36% Kirschen.

b) 78% entsprechen CHF 85.80. (1 P)

$\frac{CHF\ 85.80}{78\%} \cdot 100\% = 110\ Fr.$

Der Preis für 10 kg gerösteten Kaffee ist CHF 110.

Der Preis für 15 kg gerösteten Kaffee ist CHF 165. (1 P)

2. Lösungsweg:

10 kg ungerösteter Kaffee → 7.8 kg gerösteter Kaffee kosten CHF 85.80

15 kg gerösteter Kaffee kosten CHF 165.00 (2 P)

3. Lösungsweg:

15 kg gerösteter Kaffee entspricht 78%

19.2308 kg ungerösteter Kaffee (= 100%) wird benötigt. (1 P)

10 kg = CHF 85.80

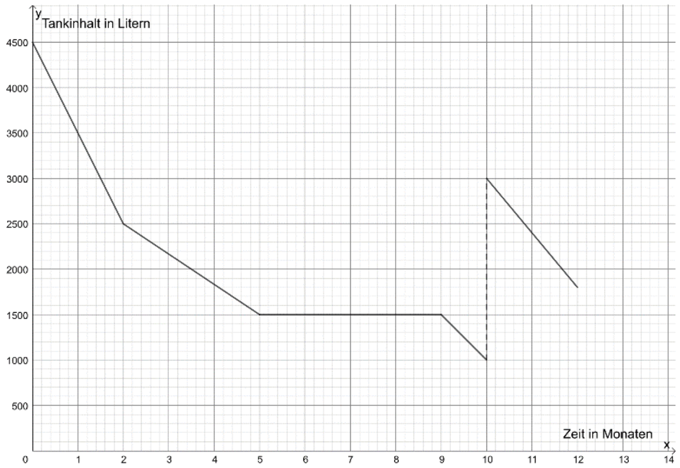
19.2308 kg = CHF 165.00 (1 P)

Korrekturhinweise:

- b) 1 Punkt, falls der falsche Faktor $\frac{122}{100}$ verwendet und dann richtig weiter gerechnet wurde (→ 10 kg = 104.68 Fr. → 15 kg = 157.01 Fr.)

Aufgabe 6: Funktionale Zusammenhänge (4 Punkte)

Das Diagramm zeigt den Inhalt eines Heizöltanks im Verlauf eines Jahres.



a) Lies die fehlenden Werte aus dem Diagramm ab und trage sie in die Tabelle ein.

Zeit (Monate)		2		12
Tankinhalt (Liter)	3500		1000	

b) Beschreibe mit Worten und einer **Zahl**: Was passiert am Ende des zehnten Monats?

c) **Berechne**: Wie viele Liter sind nach 4 Monaten noch enthalten?

d) Betrachte den ersten Abschnitt (0 bis 2 Monate). Gib eine Formel (Funktionsgleichung) an, mit der du die Anzahl Liter im Tank (y) mit Hilfe der Zeit (x) berechnen kannst.

Lösungen:

a) Alle 4 Werte richtig (1 P)

Zeit (Monate)	**1**	2	**10**	12
Tankinhalt (Liter)	3500	**2500**	1000	**1800**

b) Der Tank wird um **2000 Liter aufgefüllt**. (1 P)

Hinweis: Die fett gedruckten Begriffe müssen sinngemäss vorhanden sein:
z.B.: Es wird Öl eingefüllt, so dass sich die Ölmenge verdreifacht.
Es kommen 2000 Liter Öl dazu.

c) Abnahme: 1000 Liter pro 3 Monate; $\frac{1000}{3}$ pro Monat

$y = 2500 - 2 \cdot \frac{1000}{3} \approx 1833$ Liter (1 P)

Hinweise: Kein Abzug bei Rundungsfehlern oder fehlender Einheit.
Fürs Schätzen/Ablesen aus dem Diagramm: 0 Punkte

d) $y = 4500 - 1000x$ (1 P)

Aufgabe 7: Wahrscheinlichkeitsrechnung (4 Punkte)

Drei spezielle Würfel haben die folgenden Augenzahlen:

Würfel 1: zwei Seiten zeigen die Zahl 2, zwei Seiten die Zahl 4 und zwei Seiten die Zahl 6.

Würfel 2: vier Seiten zeigen die Zahl 2, eine Seite die Zahl 4 und eine Seite die Zahl 6.

Würfel 3: drei Seiten zeigen die Zahl 2, zwei Seiten die Zahl 4 und eine Seite die Zahl 6.

Die drei Würfel werden einmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle drei Würfel die Augenzahl 2 zeigen.

b) alle drei Würfel die gleiche Zahl zeigen.

c) die drei Würfel die Augensumme 16 zeigen.

Lösungen:

a) $P(2{,}2{,}2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{9} = 0.\overline{1} \approx 11\%$ (1 P)

b) $P(\text{alle gleich}) = P(2{,}2{,}2) + P(4{,}4{,}4) + P(6{,}6{,}6) =$
$= \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108} = \frac{5}{36} = 0.13\overline{8} \approx 14\%$ (1 P)

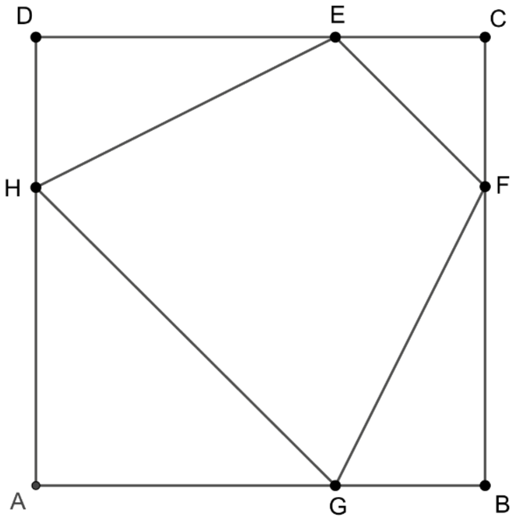
c) $P(\text{Augensumme } 16) = P(6{,}6{,}4) + P(6{,}4{,}6) + P(4{,}6{,}6) =$
$= \frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \frac{1}{108} = \frac{1}{27} = 0.\overline{037} \approx 3.7\%$ (2 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- Als Lösung kann ein Bruch (auch ungekürzt), eine Dezimalzahl oder eine Prozentzahl angegeben werden. Rundungsfehler geben keinen Abzug.
- Bei c) erhält man 1 Punkt für die Wahrscheinlichkeit von 1 richtigen Kombination, z.B. $P(6{,}6{,}4) = \frac{1}{54}$, 1 Punkt für das richtige Ergebnis.

Aufgabe 8: Geometrie in der Ebene (4 Punkte)

Das Quadrat $ABCD$ hat den Flächeninhalt 36 cm². Die Strecken $\overline{EC}, \overline{CF}$, $\overline{GB}$ und $\overline{DH}$ sind jeweils 2 cm lang.



a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $HGFE$.

b) Berechne die Höhe h des Trapezes $HGFE$.

Lösungen:

a) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$

$A_T = 36 - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot 4}{2} = 36 - 2 - 4 - 4 - 8 = 18 \text{ cm}^2$ (2 P)

b) $\overline{HG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66 \text{ cm}$ und $\overline{EF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \text{ cm}$ (1 P)

$18 = \frac{5.66+2.83}{2} \cdot h \iff h = 4.24 \text{ cm}$ (1 P)

Oder:

$\overline{HG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66 \text{ cm}$ und $\overline{EF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \text{ cm}$

$\overline{FG} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47 \text{ cm}$

$$h = \sqrt{4.47^2 - \left(\frac{5.66 - 2.83}{2}\right)^2} = 4.24 \text{ cm}$$

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- a) Alle Restdreiecke richtig: 1 P., Endergebnis: 1 P.
- Fehlende Einheiten ergeben keinen Abzug.
- Pro Fehler 1 Punkt Abzug

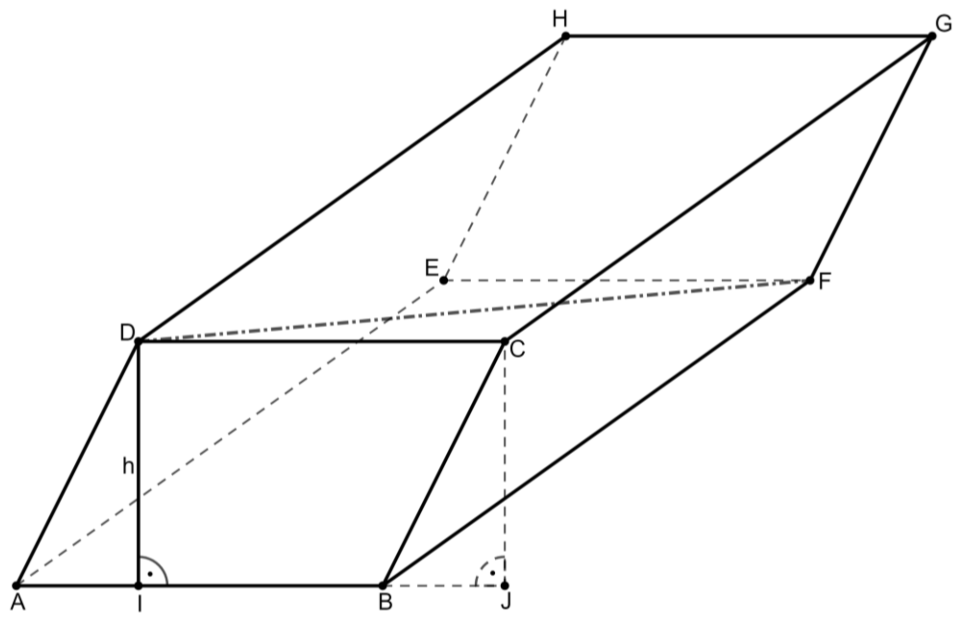
Aufgabe 9: Geometrie im Raum (4 Punkte)

Die Grundfläche $ABCD$ eines liegenden, **geraden** Prismas ist ein Parallelogramm, die Seitenkante BF entspricht der Höhe des Prismas. Die gegenüberliegende Fläche $EFGH$ ist zur Fläche $ABCD$ kongruent.
Vom Parallelogramm ist bekannt: $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{AC} = 17$ cm, $h = \overline{DI} = 8$ cm
Die Seitenkante $\overline{BF}$ ist 20 cm lang.

a) Berechne das Volumen des Prismas.

b) Berechne die Länge der Strecke $\overline{AJ}$

c) Berechne die Länge der Strecke $\overline{DF}$.



Lösungen:

a) $V = \overline{AB} \cdot h \cdot \overline{BF} = 9 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = \underline{\underline{1440 \text{ cm}^3}}$ (1 P)

b) $\overline{AJ} = \sqrt{\overline{AC}^2 - h^2} = \sqrt{(17\text{cm})^2 - (8\text{cm})^2} = \underline{\underline{15 \text{ cm}}}$ (1 P)

c) $\overline{BJ} = \overline{AJ} - \overline{AB} = 15 \text{ cm} - 9 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$
$\overline{BI} = \overline{AB} - \overline{BJ} = 9 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ (1 P)
$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BI}^2 + h^2} = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (8 \text{ cm})^2} = 8.544 \text{ cm}$
$\overline{BH} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{(8.544 \text{ cm})^2 + (20 \text{ cm})^2} = \underline{\underline{21.75 \text{ cm}}}$ (1 P)

Korrekturhinweise und Punkteverteilung:

- Rundungsfehler ergeben keinen Punktabzug.
- Fehlende Einheiten ergeben keinen Abzug.
- Pro Fehler 1 Punkt Abzug